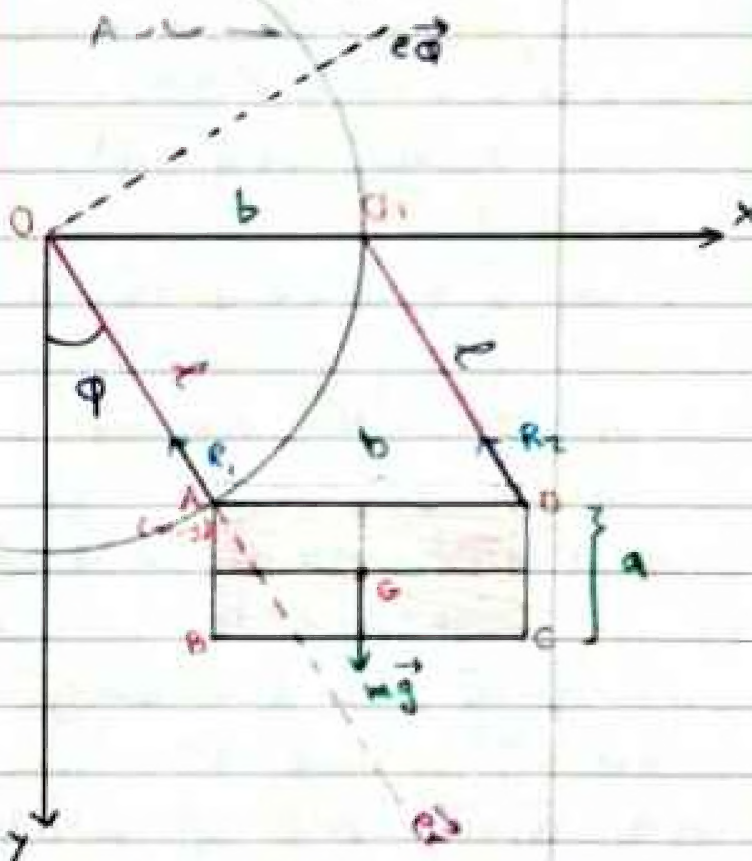


تطبيقات على نظرية كمية الحركة:

المسألة: في المجموعة المادية الخالية من قوة خارجية  
توى وإسما مجموع توى:

مثال: لنأخذ صفيحة ممتدة في مستوى  $xy$   
وطولها  $a$  وعرضها  $b$  ونفرض أن نقطتي  
 $A$  و  $D$  ممتدتين متعامدتين ..



حركة هذه الصفيحة ABCD  
هي حركة السرابية ومستوية (لأنها  
تتبع قمت تأثير ثقلها فقط)  
وعند وسطاء الحركة 1 وهو  $\phi$   
الزاوية المحيطة.

إحداثيات نقطة  $A(x, y)$ :

$$x = l \cdot \cos \phi$$

$$y = l \cdot \sin \phi$$

حيث  $l$  هي طول الخيط

وإحداثيات مركز الكتلة  $G$ :

$$x_G = \frac{x_A + a}{2}$$

$$y_G = \frac{y_A + b}{2}$$

لدينا القانون الزمني لحركة هذه الصفيحة  
تتعامد معها كما تتعامد مع الخواص لتبسط  
بأحد المحيطين، أما الخيط الثاني فرضه على  
الحركة أنها اسطوانية ..

لدينا خططين حركته والزاوية  $\phi$ . إذاً نحتاج  
إلى ثلاث معادلات ..

تطبيقاً لنظرية كمية الحركة

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$m\vec{g}$  الثقل : القوة الخارجية

بالإحداثيات الميكانيكية:

$$\Rightarrow \vec{p} = m \cdot \vec{v} = m \cdot \dot{x} \cdot \vec{e}_x + m \cdot \dot{y} \cdot \vec{e}_y$$

كما نريد أيضاً بالإحداثيات الطبيعية  $r, \tau$ :

$$\vec{r} = r \cdot \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \cdot \vec{e}_r + r \cdot \frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

تنبه! ثابت الطول متغير الاتجاه



$$\Rightarrow \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$= \vec{e}_\theta \cdot \dot{\theta} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow \vec{V} = V \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

(أي أن السرعة  $\vec{V}$  تتألف من مركبة  $V_{\theta}$  و  $V_r$  و  $V_r = 40 \text{ km/h}$  و  $V_{\theta} = 47 \text{ km/h}$ )

وبالتالي:

$$m \ddot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}} = m \ddot{\vec{r}} + (P_{rx} + P_{rx}) \vec{e}_r + (P_{ry} + P_{ry}) \vec{e}_\theta$$

بموجب أن هذا هو التسارع الشعاعي  $\ddot{\vec{r}}$  و  $\ddot{\vec{r}} = -\frac{V^2}{r} \vec{e}_r$

$$\vec{V} = V \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$= V \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

أي أن التسارع الشعاعي

$$\Rightarrow \vec{V} = 0 + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{V} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

أي أن النقطة A تدور في دائرة

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{V} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{r} = \vec{V} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta - r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$$

وبالتالي:

$$m r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - m r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = m g \vec{e}_r + R_1 \vec{e}_r + R_2 \vec{e}_\theta$$

$$= -\frac{d\vec{e}_\theta}{d\theta} \cdot \dot{\theta} \cdot \vec{e}_r$$

$$\Rightarrow \vec{r} = r \cos \theta \vec{e}_r - r \sin \theta \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow m r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - m r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r = m g \cos \theta \vec{e}_r - m g \sin \theta \vec{e}_\theta + R_1 \vec{e}_r + R_2 \vec{e}_\theta$$

وبالتالي:

$$-m r \dot{\theta}^2 = m g \cos \theta + R_1 + R_2 \quad (1)$$

وبالتالي:

$$m r \ddot{\theta} = -m g \sin \theta \quad (2)$$

والمعادلة (2) تشير في سرعة المسار والقوة المركزية

يمكن حل المعادلة ② حل تقريبي عند الاهتزازات الصغيرة يكون  $\sin \theta \approx \theta$   
 فتصبح معادلة خطية نتمكن بعد بواسطتها حل التناقص  
 أو يمكن حلها بتحويلها إلى معادلة ليونر التفاضلية  
 والعرف بين الحلين هو أن الدور أكبر في معادلة ليونر  
 وبالتالي سرعة تكون أبطأ من السرعة في الحل التقريبي

لنعود إلى المعادلة ② بالمعادلة ① متحصل على معادلة ليونر  
 وللوصول إلى المعادلة الثالثة نأخذ من نظرية العزم الحركي

نص ثقتي العزم الحركي (إن مشتق العزم الحركي لمجموعة مادية يساوي مجموع عزوم  
 القوى إلى رصبة المؤثرة على هذه المجموعة أي

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

وبنفس الطريقة العزم الحركي يساوي مشتق العزم الحركي أي

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_G = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

ولنحضر بطريقة العزم الحركي بالنسبة لنقطة

للوصول إلى المعادلة الثالثة سنسلك المحيط التالي

وبما أنه لا يوجد دوران بالنسبة لـ  $G$  وبالتالي العزم الحركي بالنسبة  
 لـ  $G$  يساوي الصفر

$$\Rightarrow \frac{d \vec{L}_G}{dt} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d \vec{L}_G}{dt} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{ext} + \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int}$$

$$\Rightarrow \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{int} = 0 \quad (3)$$

وهي المعادلة الثالثة



١١. انماذج هندسية للحركة المبرمجة:

١. الحركة المبرمجة بالنسبة لنقطة ثابتة في إطار العطالة:

$$\frac{d\vec{p}_0}{dt} = \sum_i m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \text{ ext}$$

الهدف: نطلق من كمية الحركة للمجموعة S

- لنفكر لدينا مجموعة مادية مكونة من عدة نقاط  $S = \{A_1, A_2, \dots, A_n\}$

وكل نقطة مادية  $m_i$  لها سرعة  $\vec{v}_i$  وموقعها  $\vec{r}_i$

وسرعتها  $\vec{v}_i$  ونقطة انطلاقها  $\vec{r}_i$  ونقطة انطلاقها  $\vec{r}_i$

والقوة الداخلية  $\vec{F}_i^{\text{int}}$  والقوة الخارجية  $\vec{F}_i^{\text{ext}}$

والقوة الخارجية  $\vec{F}_i^{\text{ext}}$  والقوة الداخلية  $\vec{F}_i^{\text{int}}$

نفسنا كمية الحركة

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}}$$

نضرب الطرفين خارجياً بمتجه الموضع للنقطة ذات الدليل i منه:

$$\vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \vec{r}_i \wedge (\vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_i^{\text{int}})$$

$$\Rightarrow \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i = \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{int}}$$

منه  $\vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{int}} = 0$  في هذه الحالات:

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{v}_i}{dt} + \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{v}_i}{dt}$$

ولكن كما انشأنا ان  $\sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{\text{int}} = 0$  ما به نفس الطريقة  $\sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{v}_i}{dt} = 0$

اما اعمال القوى الداخلية بشكل عام لا تساوي الصفر

مما يتبع:

$$\sum_{i=1}^n \vec{r}_i \wedge (m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt}) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \wedge \frac{d\vec{v}_i}{dt} + 0 \quad (*)$$

لدينا

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i) = (\vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i) + \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} m_i \vec{v}_i$$

$$= 0 + \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i)$$



أعوانه  $\vec{v}_i \wedge m_i \vec{v}_i = 0$  لهذه الماديات التي تتحرك في اتجاهين (مركباً  
 خطياً) أو مركزاً لها نقطة سرعة يساري العبر  
 ما كمدار الزاوي = طولية الأول  $\times$  طولية الثاني  $\times$  (مساحة) أي بينهما

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i) = \vec{r}_i \wedge \frac{d}{dt} (m_i \vec{v}_i) \quad \text{وبالتالي} \\ \text{مفهوم (4)}$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i) = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n (\vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i) = M \vec{r}_G \wedge \vec{F}_G^{\text{ext}} \\ \sum_{i=1}^n m_i = M \quad \text{نلاحظ}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt} \vec{S}_0 = M \vec{r}_G \wedge \vec{F}_G^{\text{ext}}$$

وهو المطلوب إثباته ..

② ونطبق نظرية العزم الميكانيكية على كل مركز الكتلة  $G$  (مركباً أو مركزاً) :  
 إذا كانت حالة الحركة هي مركز الكتلة

$$\Rightarrow \frac{d \vec{S}_G}{dt} = \sum_{i=1}^n m_i \vec{r}_{Gi} \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

البرهان:

نأخذ مجموعة مادية  $S$  نقاطها  $A_1, A_2, \dots, A_n$  وكتلتها  $m_1, m_2, \dots, m_n$   
 وموقعات الموضع  $\vec{OA}_1, \vec{OA}_2, \dots, \vec{OA}_n$  وسرعتها  $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$   
 انطلاقاً من النتيجة:

$$\frac{d \vec{S}_0(S)}{dt} = \sum \vec{OA}_i \wedge \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

لنأخذ حال  $\vec{OA}_i = \vec{OG} + \vec{GA}_i$  وبالتالي من علاقة كونيغ

$$\Rightarrow \vec{S}_0 = (\sum m_i) \cdot \vec{V}(G) + \sum \vec{GA}_i \wedge m_i \vec{V}(A_i) \\ = \vec{S}_0(G) + \vec{S}_G(S)$$

منهنته







كما إذا كانت محلة الجار متحركة فتكون المساحة

$$\frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{r}_x \vec{i} + \dot{r}_y \vec{j} + \dot{r}_z \vec{k} + \omega \wedge \vec{r}_0$$

$\vec{r}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\dot{r}$	$\dot{r}_y$	$\dot{r}_z$
$\omega$	$\omega_y$	$\omega_z$

وبالتالي المقطع مع الجار المتحركة ليس هو الزخم الميكانيكي

$$\Rightarrow \frac{d\vec{r}_0}{dt} = \dot{r}_x \vec{i} + \dot{r}_y \vec{j} + \dot{r}_z \vec{k} + (\omega_z - r_{\omega_y}) \vec{i} + (\omega_x - r_{\omega_z}) \vec{j} + (\omega_y - r_{\omega_x}) \vec{k}$$

- إذا كانت الحركة اسطوانية فقط  $\omega = 0$  والعلاقة تبقى صحيحة

المقطع لا ينت = مشتق المساحة كما في حالة العجلة

بعد تطبيقات النظريات العامة في التحويل

① نظرية الدفع

② نظرية الزخم

③ نظرية الدفع

جسم تم حفظه بمرور  $\Delta t$  وكان يترك بسرعة  $\vec{v}_0$  وبمنهاية الدفع أصبحت سرعته  $\vec{v}$  . احسب القوة التي أوصلتنا إلى هذه السرعة  $\vec{v}$  ؟

$$m\vec{v} - m\vec{v}_0 = \int_{\Delta t} \vec{F} \cdot dt = \vec{F} \cdot \Delta t \rightarrow \text{الدفع الكلي}$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \frac{m\vec{v} - m\vec{v}_0}{\Delta t}$$

$\Delta t$  = الفترة الزمنية قصيرة

الدفع: نقرض الجسم لقوة خلال زمن معين ونعتبر أن هذه القوة لم يطرأ عليها أي تغير خلال هذه الفترة الزمنية

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{r}$$

عزم الدفع

$$\Rightarrow d\vec{r} = (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dt$$

$$\Rightarrow \int d\vec{r} = \int_0^{\Delta t} (\vec{\omega} \wedge \vec{r}) dt$$

$$= \vec{\omega} \wedge \int \vec{r} dt$$



$$\Rightarrow \vec{v}_2 - \vec{v}_1 = \vec{v}_A \wedge (\vec{r} \cdot \Delta t)$$

أي أن التغير التفاضلي للسرعة = الفرق في الزخم الحركي بين النقطتين مختلفتين

### ⑤ ظاهرة الصدم:

تعتبر أن الصدم يتحقق بما يلي:

1- تتولد منه خلال عملية الصدم قوى تصادم كبيرة جداً أساساً لنقل  
كثير من الحيز وبالنسبة للقوى الخارجية المؤثرة تعتبر مهملة أمام  
القوى الداخلية النافذة من الصدم خلال الظاهرة فقط.

2- زمن ظاهرة الصدم صغير جداً وأثناء حدوثه وانقضاء في لحظة...

وتغير المسافات أثناء الصدم صغير جداً أيضاً يمكن إهماله...

3- الصدم يحدث بين نقطتين أو جسمين...

4- القوى الخارجية تعتبر مهملة مقارنة بالقوى الداخلية وبالنسبة كمية الحركة

تأخذ:

وتعتبر المسافة ثابتة والزمن ثابتاً والقوى الخارجية 0

وبالنسبة تظهر القوة الداخلية فقط لكنّها...

وهنا تطبق نظرية كمية الحركة وبالنسبة لمركز الثقل تطبق نظرية الزخم

الحركي...

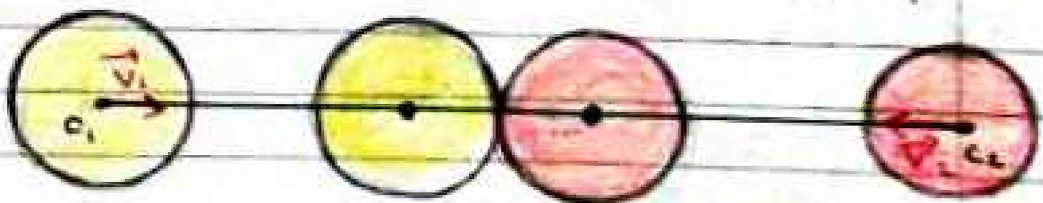
يرجع نوعان للصدم: مباشر وغير مباشر:

الصدم المباشر:

السرعة عمودية على خط الملامس وبالنسبة تتقدم الحركة المتكسبة المماسية

لرّد الفعل...

وبالنسبة القوة المؤثرة أكبر مما تكون...

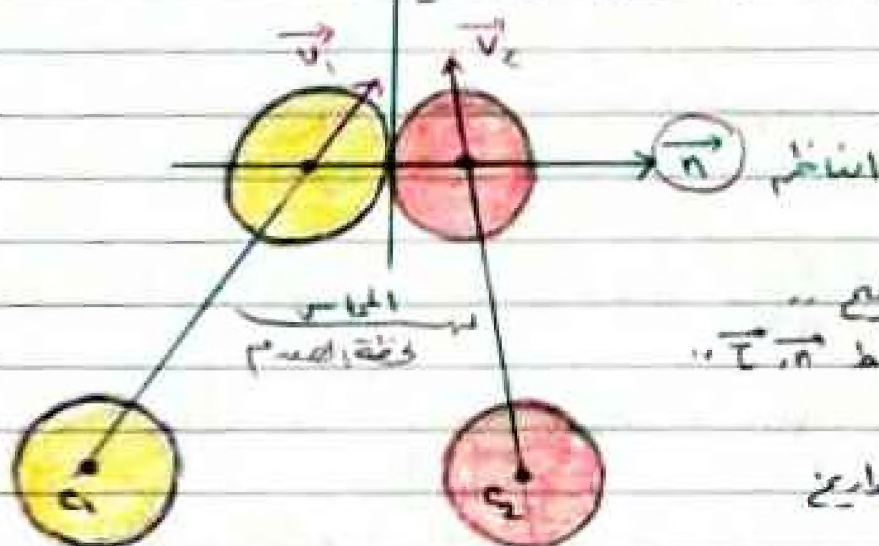


لحظة الصدم

المماسية



التصادم غير المباشر : السرعة أثناء حدوث التصادم تكون غير محولة  
 مع خط المراكز ( أي ماثلثة مع خط المراكز )  
 يكون هذا التصادم غير مباشر  $\vec{T}$  المماس  
 وتوجد مركبة لرد الفعل عاكسة



معرفة الرسم جميع ..  
 بالنوع خط  $\vec{n}, \vec{T}$  ..

كل ما هذا التصادم الاصطدام  
 رمضاء انتها ..

انتهى المحاضرة الخامسة